Heinz Rupprecht

2 interessante mathematische Probleme mit aufwendigen Algorithmen

In diesem Vortrag soll gezeigt werden, wie lange und mühevoll der Weg von einem relativ einfachen mathematischen Problem bis zur Realisierung durch ein einwandfrei laufendes Computerprogramm sein kann.
Ein Computer ist nämlich ein überaus dummes und hinterhältiges Ding. Wenn man nicht jede Kleinigkeit einprogrammiert, macht er auch schon etwas falsch.
Ein gutes Programm muß also alle Möglichkeiten, die im Laufe eines Algorithmus auftreten können berücksichtigen.
Informatik-Unterricht in der Schule dient also nicht nur dazu, die Schüler und Schülerinnen mit dem Computer vertraut zu machen, bzw. Programmiersprachen zu lernen, sondern kann auch dazu benutzt werden, die Schüler zur Genauigkeit zu erziehen - denn nur wer bei der Erstellung eines Computerprogrammes gewissenhaft und sorgfältig ist, kann Erfolg haben. In kaum einer anderen Disziplin rächt sich Schlamperei so sehr, wie gerade in der Informatik.
Dazu ein Beispiel:

<u>Die Hauptachsentransformation</u>:
Gegeben sei ein Kegelschnitt

$$KS: ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

wobei die Koeffizienten a,b,..,f beliebige reelle Zahlen seien, aber nicht a=b=c=0.
Bekanntlich kann KS folgende 9 Punktmengen repräsentieren: die leere Menge, einen Punkt, eine Gerade, zwei paralelle Gerade, zwei, sich schneidende Gerade, einen Kreis, eine Elipse, eine Hyperbel sowie eine Parabel.

Es soll ein Programm erstellt werden, um bei vorgegebenen Werten von a,b,c,d,e und f den Typ des Kegelschnitts zu bestimmen.
Im ersten Teil des Vortrages möchte ich zeigen, wie eine gewissenhafte und lückenlose Behandlung dieses Problems aussehen könnte.

Zunächst wollen wir den Kegelschnitt KS durch eine geeignete Drehung und Translation in eine besonders 'schöne' Lage bringen. Bei Bewegungen in der Ebene ändert sich der Typ ja nicht!
1) Drehung: Stellen wir den gedrehten Kegelschnitt KS' in den Variablen x',y' dar, so gilt:

$$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta$$
$$y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

Dabei ist θ der Drehwinkel. Es folgt:

$$KS': a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$$

mit:

$$a' = a\cos^2\theta - b\sin 2\theta + c\sin^2\theta$$
$$2b' = 2b\cos 2\theta + (a-c)\sin 2\theta$$
$$c' = a\sin^2\theta + b\sin 2\theta + c\cos^2\theta$$
$$d' = d\cos\theta - e\sin\theta$$
$$e' = d\sin\theta + e\cos\theta$$
$$f' = f$$

2) Translation: Sind x'',y'' die Koordinaten des gedrehten und verschobenen Kegelschnittes KS'', so gilt:

$$x' = x'' - u$$
$$y' = y'' - v$$

Das ergibt für die Koeffizienten des neuen Kegelschnittes

$$KS'': a''x''^2 + 2b''x''y'' + c''y''^2 + d''x'' + e''y'' + f'' = 0$$

$$a''=a' \ , \ 2b''=2b' \ , \ c''=c'$$

$$d''=d'-2(a'u+b'v) \ , \ e''=e'-2(b'u+c'v)$$

$$f''=f'+a'u^2+2b'uv+c'v^2-d'u-e'v$$

Nun sind θ,u und v so zu bestimmen, daß KS'' in Normalform liegt. Zunächst ist der Drehwinkel θ so zu bestimmen, daß KS' achsenparalell wird. Dazu muß $b'=0$ sein. Das heißt aber:

$$2b\cos 2\theta+(a-c)\sin 2\theta=0 \quad (!)$$

1.Fall: $a=c, b=0$. θ kann beliebig gewählt werden (z.B. $\theta:=0$)
2.Fall: $a=c, b\neq 0$. Dann sei $\theta:=45$ Grad.
3.Fall: $a\neq c$. Dann muß $\tan 2\theta=2b/(c-a)$ gelten, also etwa

$$\theta:=1/2\arctan(2b/(c-a))$$

Jetzt ist der Verschiebungsvektor (u,v) so zu wählen, daß die linearen Terme möglichst verschwinden ($d'=0$, $e'=0$). Zu diesem Zweck sind 4 Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: $a'\neq 0$, $c'\neq 0$

Es kann stets $a'>0$ vorausgesetzt werden. Wir setzen

$$u:=d'/2a' \ , \ v:=e'/2c'$$

Damit wird $d''=0$ und $e''=0$.

Fall 1A: $c''>0$

Fall 1Aa: $f''=0$. Dann ist $x''=y''=0$ die einzige Lösung von KS'' und KS ist ein Punkt.

Fall 1Ab: $f''>0$. Die Lösungsmenge ist leer.

Fall 1Ac: $f''<0$. Die Lösungsmenge ist eine Ellipse, im Falle $a''=c''$ sogar ein Kreis.

Fall 1B: $c''<0$.

Fall 1Ba: $f''=0$. Dies sind aber zwei einander schneidende Gerade.

Fall 1Bb: $f''>0$. Es handelt sich hier um eine Hyperbel.

Fall 1Bc: $f''<0$. Dies ist ebenfalls eine Hyperbel.

Fall 2: $a'\neq 0$, $c'=0$

Wieder kann $a'>0$ vorausgesetzt werden.

Fall 2A: $e'\neq 0$. Setzt man $u:=-d'/2a'$, $v:=-f'/e'-d'^2/4a'^2$ so wird $d''=f''=0$ und es liegt eine Parabel vor.

Fall 2B: $e'=0$. Setzt man $u:=d'/2a'$, $v:=0$, so wird $d''=0$ und es sind abermals drei Fälle zu trennen:

Fall 2Ba: $f''<0$. Dies sind zwei paralelle Gerade.

Fall 2Bb: $f''=0$. Die beiden Geraden fallen zu einer Doppelgeraden zusammen.

Fall 2Bc: $f''>0$. Die Lösungsmenge ist leer.

Fall 3: $a'=0$, $c'\neq0$.

Man erkennt sofort, daß dieser Fall völlig analog zum Fall 2 abgehandelt wird.

Fall 4: $a'=c'=0$

Dieser Fall ist unmöglich, da es sich sonst um eine Gleichung 1. Grades handeln würde.

Damit wurden alle möglichen Falle berücksichtigt, und wir können nun zu jeder beliebigen algebraischen Gleichung zweiten Grades in zwei Variablen angeben, um welche geometrische Figur es sich handelt. Außerdem ist es nicht schwer, charakteristische Größen, wie z. B. Halbachsen, Mittelpunkt, Verdrehungswinkel, etc., anzugeben. Diese Größen sind nämlich aus KS'' unmittelbar abzulesen, und müssen eventuell einer Rücktransformation (Translation um $(-u,-v)$ mit anschliessender Drehung um $-\theta$) unterworfen werden.

Im zweiten Teil des Vortrags geht es um die Diskussion rationaler Funktionen mit rationalen Koeffizienten.

In letzter Zeit ist ein neuer Trend in der Informatik bemerkbar: symbolisch zu rechnen, soweit dies möglich ist. Eine Möglichkeit, dies zu verwirklichen, ist die Verwendung der rationalen Arithmetik. Das heißt, man rechnet so wenig wie möglich mit gerundeten reellen Zahlen, sondern versuchen diese durch Brüche darzustellen. Will man etwa die Zahl r=0.3 im Computer als reelle Zahl abspeichern, so wird r nur näharungsweise gespeichert, etwa als .3333333. Dabei geht viel an Genauigkeit verloren - Rundungs- und Rechenfehler schleichen sich ein! Speichert man r aber als Paar ganzer Zahlen (1,3) ab, d.h. als Bruch 1/3, so hat man die Zahl exakt und rundungsfehlerfrei zur Verfügung.

Freilich funktioniert diese Methode, exakt zu rechnen nur so lange, als keine Wurzeln oder transzendente Funktionen auftreten - denn die Wurzel eines Bruches ist im allgemeinen kein Bruch mehr.
Wir wollen nun sehen, wie weit wir dieses Konzept auf die Kurvendiskussion anwenden können.
Eine rationale Funktion diskutieren, heißt vor allem, die Nullstellen eines Polynoms zu berechnen; oder genauer gesagt alle reellen Nullstellen des Polynoms. Von den vielen Verfahren, die es gibt, um alle reellen Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen ist die Methode der Sturm'schen Kette meines Erachtens für die Schule am besten geeignet. Denn sie setzt im wesentlichen nichts anderes voraus, als die Fähigkeit zwei Polynome mit Rest zu dividieren. Außerdem sind die Koeffizienten des Restpolynoms wieder Brüche, falls dies auch die Koeffizienten von Dividenden- und Divisorpolynom waren. Also läßt sich die rationale Arithmetik anwenden. So ist es möglich, die Sturm'sche Kette völlig exakt zu bestimmen, und computerbedingte Rundungs- und Rechenfehler können das Ergebnis nicht mehr verfälschen.
Bevor wir auf die Sturm'sche Kette zu sprechen kommen, brauchen wir aber noch ein Resultat, das auf Cauchy zurückgeht: Die Bestimmung eines Intervalls, in dem alle reellen Nullstellen eines Polynoms liegen.

<u>Satz:</u> Sei $p(x)=a_0+a_1x+..+a_nx^n$, $a_n\neq 0$
ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann liegen alle reellen Nullstellen von p im Intervall $(-a,a)$ mit
$a:=1+\max\{|a_i|/|a_n|\}$, $i=0,..,n-1$

Beweis: $|p(x)|=|a_nx^n+(a_0+..+a_{n-1}x^{n-1})|\geq |a_nx^n|-|a_0+..+a_{n-1}x^{n-1}|\geq$
$\geq |a_n||x|^n-(|a_0|+..+|a_{n-1}||x|^{n-1})$

sei jetzt $|x|>1+m$ mit $m=a-1$. Dann gilt

$$|p(x)|\geq |a_n||x|^n-|a_n|(|a_0|/|a_n|+..+|a_{n-1}|/|a_n|\,|x|^{n-1})$$
$$\geq |a_n||x|^n(1-m/|x|\sum_{k=0}^{n-1}|x|^{-k})$$
$$>|a_n||x|^n(|x|-1-m)/(|x|-1)$$
$$>0$$

Also kann $p(x)=0$ nur gelten für $|x|<1+m=a$ q.e.d

Jetzt aber zur Sturm'schen Kette des Polynoms p:
Sei p ein Polynom mit nur einfachen reellen Nullstellen. Dies ist keine Einschränkung, denn andernfalls kann man den größten gemeinsamen Teiler von p und der Ableitung p' bilden und abdividieren. Diese Berechnungen sind mit der rationalen Arithmetik durchführbar und daher exakt.
Nun bildet man die (endliche) Folge von Polynomen:

$$p_0:=p$$

$$p_1:=-p'$$

p_2 wird als negativer Divisionsrest bei Division von p_0 durch p_1 ermittelt, also $p_0=q_1p_1-p_2$
Und so weiter $p_1=q_2p_2-p_3$ um p_3 zu berechnen et.c.
Dieser Prozeß muß nach endlich vielen Schritten abbrechen; nämlich dann, wenn das Restpolynom p_k ein konstantes Polynom ist: $p_k=c$, $c\neq 0$.
Sei nun a eine beliebige reelle Zahl. Dann kann man die Sturm'sche Kette an dieser Stelle a auswerten:

$$p_0(a),p_1(a),..,c$$

Dies ist eine endliche Folge von k+1 reellen Zahlen, von der man die Anzahl der Vorzeichenwechsel w(a) zu bestimmen hat. Nullen sollen dabei unberücksichtigt bleiben. Ist etwa

$p_0(a)$	$p_1(a)$	$p_2(a)$	$p_3(a)$	$p_4(a)$
1	-4	0	5	-7

so ist w(a)=3.
Nun gilt der entscheidende Satz:
<u>Satz</u>: Sind a,b keine Nullstellen von p, so ist die Anzahl der reellen Nullstellen zwischen a und b gegeben durch w(b)-w(a).
Vor dem Beweis ein Beispiel.
Sei $p(x)=(x+2)(x-3)=x^2-x-6$
Dann ist $p_0(x)=x^2-x-6$
$p_1(x)=-2x+1$
$p_2(x)=25/4$

denn $(x^2-x-6)=(-x/2+1/4)(-2x+1)-25/4$.

Damit ergibt sich die folgende Tabelle:

a	$p_0(a)$	$p_1(a)$	$p_2(a)$	$w(a)$
-3	6	7	6.25	0
0	-6	1	6.25	1
4	6	-7	6.25	2
5	14	-9	6.25	2
6	24	-11	6.25	2

Daraus kann man ablesen, daß es jeweils genau eine Nullstelle zwischen -3 und 0 bzw. 0 und 4 geben muß.Durch Auswertung der Sturm'schen Kette an geeigneten anderen Stellen kann man die Nullstellen noch weiter eingrenzen.

Und nun zum Beweis:

Dazu brauchen wir folgendes

<u>Lemma</u>: $p_i(c)=0,\ i>0 \qquad p_{i-1}(c)p_{i+1}(c)<0$

Beweis d.L.: Es gilt $p_{i-1}=q_i p_i - p_{i+1}$, also

$p_{i-1}(c)+p_{i+1}(c)=q_i(c)p_i(c)=0$

Daraus folgt $p_{i-1}(c)p_{i+1}(c)\leq 0$

Falls dabei aber $p_{i-1}(c)$ oder $p_{i+1}(c)=0$ wäre, so ergäbe sich auch $p_{i+2}(c)=0,\ p_{i+3}(c)=0,\ldots,p_m=0$.

Dies ist aber ein Widerspruch zu $p_m\neq 0$. Also muß gelten

$p_{i-1}(c)p_{i+1}(c)<0$

q.e.d (Lemma)

Der eigentliche Beweis des Satzes ist eine einfache Überlegung und gliedert sich in drei Teile:

1) Überschreitet man eine Nullstelle c von p_0, so nimmt $w(b)-w(a)$ um 1 ab.

Dies sieht man leicht an Hand der folgenden Tabellen ein, die die beiden möglichen Fälle darstellen:

	$c-\varepsilon$	c	$c+\varepsilon$
p_0	<0	0	>0
p_1	<0	<0	<0
w	0	0	1

	$c-\varepsilon$	c	$c+\varepsilon$
p_0	>0	0	<0
p_1	>0	>0	>0
w	0	0	1

2) Überschreitet man eine Nullstelle von p_i, $i>0$ so ändert sich $w(b)-w(a)$ nicht:
Auch dies läßt sich am besten an hand zweier Tabellen veranschaulichen:

	$c-\varepsilon$	c	$c+\varepsilon$
p_{i-1}	<0	<0	<0
p_i	*	0	*
p_{i-1}	>0	>0	>0
w	1	1	1

	$c-\varepsilon$	c	$c+\varepsilon$
p_{i-1}	>0	>0	>0
p_i	*	0	*
p_{i+1}	<0	<0	<0
w	1	1	1

3) Überschreitet man keine Nullstelle eines p_i, so ändert sich $w(b)-w(a)$ nicht.

q.e.d

Das Verfahren mit der Sturm'schen Kette ermöglicht also, zu jedem Intervall anzugeben, wieviele reellen Nullstellen darin liegen.
Wenden wir dies zunächst auf das Intervall $(-a,a)$ an, das wir mit dem Satz von Cauchy ermittelt haben, so bekommen wir die Anzahl aller reellen Nullstellen von p.
Durch fortgesetzte Intervallteilung können wir daher disjunkte Intervalle finden, in denen jeweils genau eine reelle Nullstelle liegt, und diese dann mit einem Näherungsverfahren bestimmen (z.B. Bisektion oder Newton'sches Iterationsverfahren).
Natürlich kann man nicht die Nullstelle selbst exakt bestimmen (falls der Grad von p größer 4 ist), wohl aber die sie enthaltenden Intervalle.
Zusammenfassend kann man folgendes sagen:
Von den vielen Methoden, alle reellen Nullstellen eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten zu bestimmen, mag die Methode mit den Sturm'schen ketten vielleicht nicht die effizienteste sein (das Muller-Verfahren ist in dieser Hinsicht sicher günstiger), aber sie läßt sich bei Verwendung der rationalen Arithmetik (wenn also die Regeln der Bruchrechnung einprogrammiert wurden) völlig exakt und vor allem

rundungsfehlerfrei durchführen und liefert verläßliche Ergebnisse, während man sonst nie ganz sicher sein kann, ob nicht die (akkumulierenden) Rundungs- und Rechenfehler das Ergebnis -unter Umständen ganz entscheidend - verfälschen.
Außerdem ist die Sturm'sche Kette-Methode ziemlich elementar und für Schüler der Oberstufe leicht zu verstehen - braucht man doch nichts anderes als den Divisionsalgorithmus für Polynome zu beherrschen.
Insbesondere wäre das eine gute Gelegenheit, diesen gut einzuüben.